Théorème de Stampacchia

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
— 205 : Espaces complets
— 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
— 213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
— 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
— 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit H un espace de Hilbert et $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H i.e. vérifiant les conditions :*

(i) $\exists c > 0 / \forall u, v \in H, |a(u,v)| \leq c||u||||v||$

(ii) $\exists \alpha > 0 / \forall v \in H, a(v,v) \geq \alpha ||v||^2$

Soit K un convexe fermé non vide, étant donné $\varphi \in H'$, il existe $u \in K$ tel que

$$\forall v \in K, a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \quad (*)$$

Si de plus a est symétrique, alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in K \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min\limits_{v \in K} \left\{ \dfrac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\} \end{cases}$$

Preuve :

Étape 1 : Reformulons le problème $(*)$ en terme de problème de point fixe.

D'après le théorème de représentation de Riesz,

$$\exists! f \in H / \forall v \in H, \varphi(v) = \langle f, v \rangle$$

De plus, pour tout $u \in H$ fixé, $v \mapsto a(u,v)$ est linéaire continue donc il existe un unique $Au \in H$ tel que $a(u,v) = \langle Au, v \rangle$.

A est alors un opérateur linéaire de H dans H par unicité avec $\forall u \in H, \begin{cases} ||Au|| & \leq c||u|| \\ \langle Au, u \rangle & \geq \alpha ||u||^2 \end{cases}$.

Le problème $(*)$ consiste alors à trouver $u \in K$ tel que

$$\begin{aligned} & \forall v \in K, \langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \\ \iff & \forall v \in K, \forall \rho > 0, \langle \rho f - \rho Au + u - u, v - u \rangle \leq 0 \\ \iff & u = P_K(\rho f - \rho Au + u) \end{aligned}$$

Étape 2 : Trouvons ρ tel que $\begin{array}{cccc} S & : & K & \to & K \\ & & v & \mapsto & P_K(\rho f - \rho A v + v) \end{array}$ soit une contraction afin d'utiliser un théorème de point fixe.

Comme P_K est $1-$lipschitzienne,

$$\forall v_1, v_2 \in K, ||S(v_1) - S(v_2)|| \leq ||(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)||$$

D'où

$$\begin{aligned} ||S(v_1) - S(v_2)||^2 &\leq ||v_1 - v_2||^2 - 2\rho\langle v_1 - v_2, Av_1 - Av_2\rangle + \rho^2||Av_1 - Av_2||^2 \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2)||v_1 - v_2||^2 \end{aligned}$$

Comme $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2 \underset{\rho \to 0}{\sim} 1 - 2\rho\alpha < 1$, il existe $\rho > 0$ tel que $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2 < 1$.
On a alors

$$||S(v_1) - S(v_2)|| \leq k||v_1 - v_2||$$

Par théorème de point fixe de Picard, S admet un point fixe.

Supposons de plus que $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique

Si de plus $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, $(u, v) \mapsto a(u, v)$ définit un nouveau produit scalaire sur H de norme $u \mapsto a(u, u)^{\frac{1}{2}}$ équivalente à $|| \cdot ||$. H est donc un espace de Hilbert pour ce produit scalaire.
Par théorème de Riesz, il existe $g \in H$ tel que pour pour tout $v \in H$, $\varphi(v) = a(g, v)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} (*) &\iff \forall v \in K, a(g - u, v - u) \leq 0 \\ &\iff u = \widetilde{P_K} g \end{aligned}$$

où $\widetilde{P_K}$ désigne la projection de g au sens du produit scalaire défini par a.
Il faut donc trouver $u \in K$ réalisant $\min\limits_{v \in K} a(g - v, g - v)^{\frac{1}{2}}$.
Ceci revient à minimiser sur K la quantité $a(g - v, g - v)$ donc à minimiser $a(v, v) - 2a(g, v)$ donc minimiser $\dfrac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v)$. $\square$

Annexe

Application (Résolution du problème de Dirichlet non homogène en dimension 1)**.** *Soit* $I =]0,1[$*,* $f \in L^2(I)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, il existe* $u \in H^2(I)$ *unique vérifiant :*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \textit{sur } I \\ \tilde{u}(0) = \alpha, \tilde{u}(1) = \beta \end{cases}$$

avec $\tilde{u}$ *le représentant continue de* u*.*
De plus, u *s'obtient par*

$$u = \min_{\substack{v \in H^1 \\ v(0)=\alpha, v(1)=\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}$$

Preuve : Soit K la partie de $H^1(I)$ définie par

$$K = \{v \in H^1(I), v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}$$

K est un convexe fermé de $H^1(I)$ Si u est une solution classique, alors

$$\forall v \in K, \int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) = \int_I f(v-u) \geq \int_I f(v-u)$$

Donc par théorème de Stampacchia, il existe un unique $u \in K$ solution du problème de Dirichlet. Ce u s'obtient par

$$u = \min_{\substack{v \in H^1 \\ v(0)=\alpha, v(1)=\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}$$

$\square$

Références

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Masson, 1987.